208 — Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n\in\mathbb{N}^*$.

I] Normes et applications continues

1] Notion de norme et de norme équivalente

Définition 1 : Une norme sur E est une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ telle que : [I.1.1]

(i) $\|x\|=0 \iff x=0$

(ii) $\forall x\in E, \forall \lambda\in\mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$

(iii) $\forall x,y\in E, \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

Exemples 2 : (1) Pour $x=(x_1;\dots;x_n)\in\mathbb{K}^n$, $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|;\dots;|x_n|\}$, $\|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

(2) Pour $p\in[1;+\infty]$, $f\in L^p$, $\|f\|_p = \begin{cases} \sup|f(x)| & \text{si } p=+\infty \\ \left(\int_\Omega |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} & \text{sinon} \end{cases}$ sont des normes sur L^p.

Remarque 3 : À partir d'une norme on obtient une distance induite : $d(x;y)=\|x-y\|$ ce qui permet de définir une topologie sur E. [L.1]

Définition 4 : On dit que deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont équivalentes s'il existe $K_1, K_2>0$ telles que : [I.1.5]

$\forall x\in E,\ K_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le K_2\|x\|_1$

Exemple 5 : Soit $x\in\mathbb{K}^n$ et $p\in[1;+\infty]$, $\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$

Théorème 6 : Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes entre elles.

2] Applications linéaires continues

Soit E, F deux evn et $T\in\mathcal{L}(E;F)$.

Proposition 7 : T est continue ssi $\exists K\ge 0 \mid \forall x\in E, \|T(x)\|_F \le K\|x\|_E$ [I.1.4]

Exemple 8 : $\delta_0 : \begin{array}{l} \mathcal{C}([0;1])\to\mathbb{K} \\ f\mapsto f(0) \end{array}$ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour $\|\cdot\|_1$. [L.1]

Corollaire 9 : $\|T\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}$ est la plus petite constante de la proposition 7. [I.1.4]

De plus, $\|T\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|T(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E=1}\|T(x)\|_F$

Proposition 10 : L'application : $\begin{array}{l}\mathcal{L}(E;F)\to\mathbb{R}_+ \\ T\mapsto\|T\|\end{array}$ est une norme sur $\mathcal{L}(E;F)$ appelée norme opérateur.

3] Différences entre dimension finie et infinie

Remarque 11 : Pour montrer une convergence, différentiabilité, on peut choisir n'importe quelle norme. [I.2.1]

Lemme 12 : Soit $F\subseteq E$ sous-ev fermé de E normé, $F\neq E$. [L.1]

Alors : $\forall \delta\in]0;1[, \exists x\in E \setminus \|x\|=1$ et $d(x;F)\ge 1-\delta$

Théorème 13 : (de Riesz) $\dim(E)<+\infty$ ssi $\overline{B(0;1)}$ compact

Proposition 14 : Soit E evn tq : $\dim(E)=n<+\infty$

Alors : (1) E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$

(2) Soit $F\subseteq E$ fermé, borné, alors F compact

(3) E est complet

(4) Toute $T\in\mathcal{L}(E;F)$ est continue

Contrexemple 15 : Le dernier point est faux en dim infinie. L'application $\begin{array}{l}\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X] \\ P\mapsto P'\end{array}$ est linéaire mais pas continue.

II] Cas des espaces vectoriels normés complets

1] Espaces de Banach

Définition 16 : Un evn est complet si toute suite de Cauchy converge. On appelle espace de Banach tout evn complet. [I.1.3]

Exemples 17 : (1) $\forall p\in[1;+\infty]$, $(\mathbb{K}^n;\|\cdot\|_p)$ est complet

(2) $(\mathbb{Q};|\cdot|)$ n'est pas complet

Proposition 18 : Si F est complet, alors $\mathcal{L}(E;F)$ aussi. [I.1.4]

Définition 19 : $\mathcal{L}(E;\mathbb{K})$ est noté E^* et est appelé dual de E. C'est un espace de Banach. [L.1]

2] Conséquences du théorème de Baire

Soit E, F deux espaces de Banach

IV.1 [Li]

Théorème 20 : (de Baire)(V1) Soit $(F_n) \in E^{\mathbb{N}}$ fermés tq : $\mathring{F}_n = \emptyset$

Alors : $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n} = \emptyset$

Théorème 21 : (de Baire)(V2) Soit $(O_n) \in E^{\mathbb{N}}$ ouverts denses dans E

Alors : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans E

Application 22 : Un espace de Banach de dimension infinie n'admet pas de base algébrique dénombrable.

Théorème 23 : (de Banach-Steinhauss) Soit $(T_i) \in \mathcal{L}(E;F)^I$ telles que : $\forall x \in E$, $C_x := \sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F < +\infty$

Alors : $C := \sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E;F)} < +\infty$

Application 24 : Il existe $f \in L^1([0;1];\mathbb{C})$ qui ne coïncide pas avec sa série de Fourier.

Corollaire 25 : Soit $(T_n) \in \mathcal{L}(E;F)^{\mathbb{N}}$ tq : $\forall x \in E$, $\lim_{n\to+\infty} T_n(x) = T(x)$

Alors : (1) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E;F)} < +\infty$

(2) $T : E \to F$ est linéaire et continue

De plus, $\|T\|_{\mathcal{L}(E;F)} \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E;F)}$

Théorème 26 : (de l'application ouverte) Soit $T \in \mathcal{L}_c(E;F)$ surjective.

Alors : $\exists c > 0 \setminus \mathcal{B}_F(0;c) \subseteq T(\mathcal{B}_E(0;1))$ i.e. T est ouverte

Corollaire 27 : (théorème des isomorphismes de Banach) Soit $T \in \mathcal{L}_c(E;F)$ bijective

Alors : T^{-1} est continue (et T est un isomorphisme)

Application 28 : La transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective

Théorème 29 : (du graphe fermé) Soit $T \in \mathcal{L}(E;F)$ telle que le graphe de T : $G_T := \{(x;T(x)) \in E \times F \mid x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$.

Alors : T est continue.

3] Cas particulier des espaces de Hilbert

Soit $(H;\langle\,;\rangle)$ un espace de Hilbert

II.2 [Li]

Théorème 30 : (de projection) Soit $\emptyset \neq C \subseteq H$ convexe, fermé

Alors : $\forall x \in H$, $\exists! \, p_C(x) \in C \setminus \|x-y\| = d(x;C)$.

$p_C(x)$ est caractérisé par : $p_C(x) \in C$ et $\forall z \in C$, $\mathrm{Re}(\langle x - p_C(x) | z - p_C(x)\rangle) \leq 0$

Corollaire 31 : L'application $p_C : H \to C$ est 1-lipschitzienne.

Théorème 32 : (de projection sur un sev) Soit $F \subseteq H$ sous-ev fermé.

Alors : $p_F : H \to F$ est linéaire continue et $p_F(x)$ est l'unique point de F vérifiant $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$

Théorème 33 : Pour tout sous-ev F fermé de H, $H = F \oplus F^\perp$

Corollaire 34 : Soit F sous-ev de H

Alors : F est dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$

Application 35 : $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Définition 36 : Soit $\varphi \in H^*$ et f forme bilinéaire sur H.

On dit que φ est continue si : $\exists M > 0 \setminus \forall x \in E$, $|\varphi(x)| \leq M \|x\|$,

on dit que f est continue si : $\exists M > 0 \setminus \forall x, y \in E$, $|\varphi(x;y)| \leq M \|x\| \|y\|$,

f est coercive si : $\exists \mu > 0 \setminus \forall x \in E$, $f(x;x) \geq \mu \|x\|^2$

[Tseu]

Théorème 37 : (de représentation de Riesz) Soit $\varphi \in \mathcal{L}_c(H;\mathbb{R})$.

Alors : $\exists! \, y \in H \setminus \forall x \in H$, $\varphi(x) = \langle x | y \rangle$

Application 38 : (théorème de Lax-Milgram) Soit f forme bilinéaire continue sur H, coercive et $\varphi \in \mathcal{L}_c(H;\mathbb{R})$.

Alors : $\exists! \, u \in H \setminus \forall v \in H$, $f(u;v) = \varphi(v)$

II.2 [Li]

Corollaire 39 : Pour tout $T \in \mathcal{L}_c(H;H)$, il existe $T^* \in \mathcal{L}_c(H;H)$ appelé adjoint de T tel que : $\forall x, y \in H$, $\langle T(x) | y \rangle = \langle x | T^*(y) \rangle$.

Définition 40 : On appelle opérateur sur H toute application linéaire continue $T : H \to H$. On dit que $(u_n) \in H^{\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H si :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| = 1$

(ii) $\forall n \neq m$, $u_n \perp u_m$

(iii) $\mathrm{Vect}(u_n \mid n \in \mathbb{N})$ est dense dans H

[L°] II.2

Exemple 41 : $(e_n : x \mapsto e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Théorème 42 : Soit $(H, \langle\,|\,\rangle)$ espace préhilbertien, (u_n) base hilbertienne.
Alors : $\forall x \in E$, $x = \sum_1^{+\infty} \langle x | u_n \rangle u_n$ et $\|x\|^2 = \sum_1^{+\infty} |\langle x | u_n \rangle|^2$

III] Quelques exemples d'utilisation des espaces vectoriels normés

1] Par la transformée de Fourier

[L°] X.5

Définition 43 : On appelle espace de Schwartz l'espace :
$$S(\mathbb{R}) := \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \mid \forall n, k \in \mathbb{N},\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n f^{(k)}(x)| < +\infty \}$$

Exemple 44 : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-ax^2}$ avec $a>0$ est dans $S(\mathbb{R})$, pas dans $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$

Remarque 45 : $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}) \subseteq S(\mathbb{R})$

Théorème 46 : L'application $\mathcal{F} : \begin{array}{l} S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \left[\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\,dx\right] \end{array}$ est surjective

Théorème 47 : Soit $f \in S(\mathbb{R})$.
Alors : $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\mathcal{F}(f)\|_2^2$

Proposition 48 : Soit $f \in \mathcal{L}(E;F)$ avec E, F deux $\mathbb{R}$-ev.
Alors : f est continue ssi f est uniformément continue

Théorème 49 : (de Riesz-Fischer) $\forall p \in [1;+\infty[$, $L^p(\mathbb{R})$ est complet

Théorème 50 : (de prolongement des applications uniformément continues) Soit E, F espaces métriques, F complet, $A \subseteq E$ dense et $f : A \to F$ uniformément continue.
Alors : $\exists!\, \tilde{f} : E \to F$ uniformément continue qui prolonge f.

[Jeu]

Théorème 51 : Soit $\mathcal{F} : \begin{array}{l} S(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f) \end{array}$
Alors : $\mathcal{F}$ est bien définie, et il existe un unique prolongement isomorphique, isométrique de $\mathcal{F}$ à $L^2(\mathbb{R})$.

2] À la résolution d'équations différentielles dans les espaces de Hölder

[Zal]

Définition 52 : Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ouvert, $\alpha \in]0;1]$. On note :
$$\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) = \{ f \in L^\infty(\Omega) \mid \exists C>0 \setminus \forall x, y \in \Omega, |f(x)-f(y)| \le C|x-y|^\alpha \}$$
$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

Exemple 53 : $\forall \alpha \in]0;1]$, $\begin{array}{l}]-1;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|^\alpha \end{array} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(]-1;1[)$

Remarque 54 : (1) $\mathcal{C}^1_b(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^0_b(\Omega)$
(2) Les fonctions de $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ sont uniformément continues

Proposition 55 : (1) $\forall \alpha \ge \alpha'$, $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^{0,\alpha'}(\Omega)$ et l'inclusion est continue.
(2) Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ est un ouvert borné, $\alpha \ge \alpha'$, alors l'inclusion $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^{0,\alpha'}(\Omega)$ est compacte (l'image d'une boule est relativement compacte).

Définition 56 : Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ouvert, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0;1]$. On définit :
$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega) = \{ f \in \mathcal{C}^k_b(\Omega) \mid \forall p \le k,\ f^{(p)} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \}$$
$$\|f\|_{k,\alpha} = \sum_{p\le k} \|f^{(p)}\|_\alpha \quad \text{et} \quad \|f\|'_{k,\alpha} = \sum_{p<k} \|f^{(p)}\|_\infty + \|f^{(k)}\|_\alpha$$

Théorème 57 : (1) Soit $k+\alpha > k'+\alpha'$, alors $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^{k',\alpha'}(\Omega)$ et l'inclusion est continue.
(2) Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ouvert borné, $k+\alpha > k'+\alpha'$, alors l'injection $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^{k',\alpha'}(\Omega)$ est compacte.
(3) Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ compact, borné, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists C_\varepsilon > 0 \setminus \|f\|'_{k,\alpha} \le \varepsilon \|f\|_{k,\alpha} + C_\varepsilon \|f\|_\infty$

Théorème 58 : (principe du maximum faible) (admis)
Soit $]a;b[\subseteq \mathbb{R}$, $L = A\frac{d^2}{dx^2} + B\frac{d}{dx} + C$ avec $A, B, C :]a;b[\to \mathbb{R}$ bornés tels que : $\forall x \in]a;b[$, $A(x) > 0$ et $C(x) \le 0$. Soit $u \in \mathcal{C}([a;b]) \cap \mathcal{C}^2(]a;b[)$ tel que $L(u) \ge 0$.
Alors : $\sup_{x\in]a;b[} u(x) \le \sup_{x\in\{a;b\}} \{ \sup\{u(x); 0\} \}$

Théorème 59 : Soit $\alpha \in]0;1]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $q \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(]a;b[)$ avec $q \ge 0$.
Alors : $\forall f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(]a;b[)$, $(E) : \begin{cases} -u'' + qu = f \text{ sur }]a;b[\\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$ admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(]a;b[)$.

[VIII. III.1]

Références :

[Li] Cours d'analyse fonctionnelle — Li
[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques — Isenmann
[ZQ] Éléments d'analyse — Zuily